التمرين الأوّل (04 نقاط):

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

لنعتبر النقط $A(1,2,2)$ ، $B(1,0,1)$ ، $C(3,2,1)$ من الفضاء والمستوي (P) الذي معادلته $z=1$ والنقطة D هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) ، و (Δ) هو المستقيم المعرف بتمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=-3+t \\ y=-4-t \\ z=1 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

و (S) هو السطح الكروي المعرف بالمعادلة: $x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z=0$.

من بين الأجوبة المقترحة ، اختر الجواب الصحيح مع التبرير:

	( )	( )	(ج)	( )
1) تمثيل وسيطي لـ (BC) هو:	$\begin{cases} x=1+2k \\ y=2k \\ z=1 \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$	$\begin{cases} x=-1+k \\ y=2+k \\ z=-3k \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$	$\begin{cases} x=1-2k \\ y=2k \\ z=1 \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$	$\begin{cases} x=1+2k \\ y=2k \\ z=3 \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$
2) المستقيمان (Δ) و (BC):	متوازيان تمامًا	منطبقان	متقاطعان	ليسا من نفس المستوي
3) المستقيم (BC)	محتوى في المستوى (P)	يقطع المستوي (P)	لا يوازي المستوي (P)	عمودي على المستوي (P)
4) إحداثيات النقطة D هي:	$(1,2,-1)$	$(1,1,2)$	$(1,2,1)$	$(1,2,0)$
5) السطح الكروي (S):	يشمل النقطة A	يقطعه المستوي (P)	لا يقطعه المستوي (P)	مركزه ينتمي إلى المستوي (P)

التمرين الثاني (05 نقاط):

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود P الذي متغيره z حيث: $P(z)=z^3-4z^2+6z-4$.

أ) بيّن أن المعادلة $P(z)=0$ لا تقبل حلاً تخيليًا صرفا.

ب) عيّن العددين الحقيقيين a ، b بحيث: $P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$.

ج) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$.

2) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، الوحدة $\|\vec{u}\|=2cm$.

نعتبر النقط $A;B;C$ التي لواحقها على الترتيب: $z_A=2$ ، $z_B=1-i$ ، $z_C=1+i$.

ا) أكتب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري ، استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب) أكتب z_B و z_C على الشكل الآسي .

ج) تحقق أن : $\frac{\sqrt{2}}{2} z_C = \left(\frac{z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1437} + \sqrt{2}\left(\frac{z_C}{\sqrt{2}}\right)^{2016}$.

3) ليكن R الدوران الذي مركزه A ويحول B إلى C .

ا) عيّن θ زاوية الدوران R .

ب) أكتب العبارة المركبة للدوران R ، ثم عين لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R .

4) لتكن (ϕ) الدائرة التي قطرها $[BC]$ ومركزها النقطة I و (ϕ') صورتها بالدوران R .

أنشئ بعناية كلا من الدائرتين (ϕ) و (ϕ') .

التمرين الثالث (04 نقاط):

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ 3u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$:

1) ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{2}$.

ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة .

ج) عيّن نهاية المتتالية (u_n) .

2) لنعتبر المتتالية العددية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$.

ا) بيّن أن (V_n) متتالية حسابية ، يطلب تحديد أساسها r وحدها الأول .

ب) عبر عن V_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج) عيّن ثانية نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الرابع (07 نقاط):

الجزء الأول: g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (2x+1)e^{-x} + 1$.

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيدًا α بحيث : $\alpha \in]-0,74 ; -0,73[$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني: f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (-2x-3)e^{-x} + x$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $1\,cm$).

1) أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2) بيّن أن المستقيم (d) الذي معادلته : $y = x$ هو مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $(+\infty)$.

3) ا) أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير f وشكل جدول تغيراتها .

ب) بيّن أن $f(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{2}{2\alpha + 1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$. (تدور النتيجة إلى 10^{-2}).

ج) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثييها ، ثم أكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند I .

4) أرسم المستقيم (d) والمنحنى (C_f) .

5) أ -عيّن العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة $H : x \mapsto (ax+b)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto (-2x-3)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$

ب) أحسب بـ: cm^2 المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات المعرفة بالمعادلات : $y = x$ و $x = \alpha$ و $x = 2$. (α هو العدد الحقيقي المعرف في الجزء الاول)

<u>التمرين الأوّل (04 نقاط)</u>:

السؤال	الجواب	التعليل	التنقيط
1)	( )	الجملة: $\begin{cases} x=1+2k \\ y=2k \\ z=1 \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$ هي تمثيل وسيطي للمستقيم (BC) لأن إحداثيات B تحقق الجملة أي $t=0$: وإحداثيات C تحقق أيضا الجملة أي $t=1$: .	0.75
2)	(خ)	المستقيمان (Δ) و (BC) متقاطعان لأن شعاعي التوجيه غير مرتبطين خطيا و $\begin{cases} -3+t=1+2k \\ -4-t=2k \\ 1=1 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} t=0 \\ k=-2 \end{cases}$ و $M(-3;-4;1)\in(\Delta)\cap(BC)$	1
3)	( )	المستقيم (BC) محتوى في (P) لأن: $B\in(P)$ و $1=1$ ، $C\in(P)$ ، $1=1$.	0.75
4)	(خ)	إحداثيات النقطة D هي $(1,2,1)$ لأنها تحقق معادلة (P) أي $1=1$.	0.75
5)	( )	(P) يقطع السطح الكروي (S) لأن $\omega(1,2,2)$ هي مركز (S) ونصف قطرها $R=3$ و $d(\omega;P)=1$ و $1<R$.	0.75

<u>التمرين الثاني (05 نقاط)</u>:

1) أ) لنفرض أن $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا هو ai حيث $a\in\mathbb{R}$.

وبالتالي نجد: $-ia^3+4a^2-6ai-4=0$ يكافئ: $\begin{cases} 4a^2-4=0 \\ -a^3-6a=0 \end{cases}$ وهذا مستحيل.

إذن: $P(z)=0$ لا تقبل حلا تخيليًا صرفًا..0.5

ب) $P(z)=(z-2)\left(z^2-2z+2\right)$..0.5

ج) $P(z)=0$ يكافئ $z=2$ أو (I)......$z^2-2z+2=0$..0.25

لنحل (I): $\Delta=(2i)^2$ وبالتالي المعادلة (I) تقبل حلين مركبين مترافقين هما: $1+i,1-i$..........................0.5

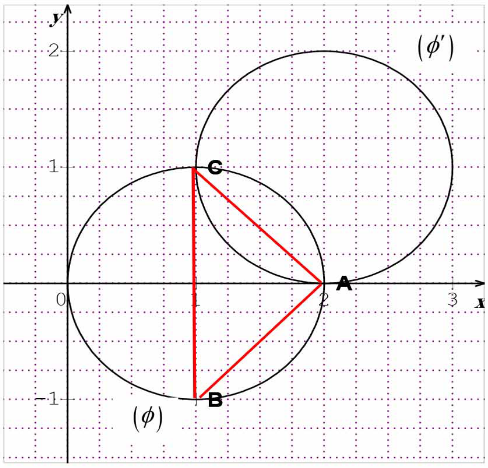
المعادلة $P(z)=0$ حلولها هي: $2,1+i,1-i$..0.25

2) أ) $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=-i$ ومنه $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{-2}+2\pi k$ والمثلث ABC قائم في A..0.5

ب) $z_B=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $z_C=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$..0.5

ج) $z_C\frac{\sqrt{2}}{2}=(1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(\frac{z_C}{\sqrt{2}}\right)^{2016}\sqrt{2}+\left(\frac{z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1437}$ ....

0.5..



أ) 3) تعيين θ زاوية الدوران R.

لدينا: $z_C - z_A = a(z_B - z_A)$ ومنه $a=-i$.

إذن $\theta = \arg(a) = \frac{\pi}{-2}+2\pi k$: 0.5

ب) العبارة المركبة للدوران R هي: $z' = -iz+2+2i$ 0.25

$z_D = 3+i$ 0.25

4) الدائرة (ϕ) مركزها $I(1;0)$ ونصف قطرها 1

والدائرة (ϕ') مركزها $I'(2;1)$ صورة I بالدوران R ونصف قطرها 1 لأن الدوران تقايس..................................0.5

التمرين الثالث (04 نقاط):

أ) 1) لنعتبر الخاصية $P(n)$ هي $u_n>0$: .

• $P(0)$ صحيحة لأن $u_0=6$ و $6>\frac{1}{2}$...0.25

• نفرض $P(n)$ صحيحة مع $n\ge 0$ أي: نفرض $u_n>\frac{1}{2}$ 0.25

• نبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: نبرهن أن:: $u_{n+1}>\frac{1}{2}$.

أي: نبرهن أن $\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}>\frac{1}{2}$.

لدينا: $u_n>\frac{1}{2}$ فرضا يكافئ $\frac{1}{3}u_n>\frac{1}{6}$ وبالتالي نجد: $\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}>\frac{1}{2}$ أي $u_{n+1}>\frac{1}{2}$:

ومنه $P(n+1)$ صحيحة..0.25.

ب) نبين أن (u_n) متناقصة تماما مهما كان $n\in$□ : $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{-3}u_n+\frac{1}{3}=\frac{2}{-3}\left(u_n-\frac{1}{2}\right)$.

لكن: $\frac{2}{-3}\left(u_n-\frac{1}{2}\right)<0$ وبالتالي نستنتج أن (u_n) متناقصة..0.5

• بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد $\frac{1}{2}$ فإنها متقاربة..0.5

ج) $\lim u_n=\frac{1}{2}$...0.5

2) لدينا: $V_n=\ln\left(u_n-\frac{1}{2}\right)$.

أ) مهما كان $n\in$□ : $v_{n+1}-v_n=-\ln 3$ ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=-\ln 3$ وحدها الأول $v_0=\ln\frac{11}{2}$ 0.75

ب) $v_n=-n\ln 3+\ln\frac{11}{2}$..0.25

• لدينا: $e^{v_n}=u_n-\frac{1}{2}$ ومنه: $u_n=e^{-n\ln 3+\ln\frac{11}{2}}+\frac{1}{2}$ ....0.25.

ج) $\lim u_n=\lim e^{-n\ln 3+\ln\frac{11}{2}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ وهي النهاية في السؤال 1-ج) 0.5

التمرين الرابع (07 نقاط):

لدينا: $g(x)=(2x+1)e^{-x}+1$.

1) دراسة تغيرات g.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$..0.5

• اتجاه التغير:

$g'(x)=(-2x+1)e^{-x}$..0.25

جدول إشارة $g'(x)$...0.25

x	$-\infty$		0.5		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

من جدول إشارة $g'(x)$ نستنتج أن: g متزايدة تماما على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ ومتناقصة تماما على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$........0.5

• جدول تغيرات g...0.25

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{e}}+1$	$\searrow$	1

2) بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $[-0.74;-0.73]$ و $g(-0.74)\times g(-0.73)<0$ فإنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]-0.74;-0.73[$................0.25

3) جدول إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$...0.25

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

الجزء الثاني:

لدينا: $f(x)=(-2x-3)e^{-x}+x$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left[\left(\frac{-2x-3}{x}\right)e^{-x}+1\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$..0.5

2) بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=0$ فإن المستقيم (d) الذي معادلته $y=x$ هو مقارب مائل لـــ: (C_f) عند $+\infty$....0.25

3) أ) لدينا: $f'(x)=(2x+1)e^{-x}+1=g(x)$...0.25

• إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ كما هو مبين في جدول الإشارة التالي:...0.25

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

من جدول إشارة $f'(x)$ نستنتج أن: f متناقصة تماما على $]-\infty;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$.............0.5

• جدول تغيرات f...0.25

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

ب) نعلم أن: $g(\alpha)=0$ يكافئ: $e^{\alpha}=-(2\alpha+1)$...0.25

لدينا كذلك $f(\alpha)=\frac{-(2\alpha+3)}{e^{\alpha}}+\alpha$ ، وبعد التعويض نجد: $f(\alpha)=\alpha+1+\frac{2}{2\alpha+1}$....................................0.25

• استنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$: بتطبيق قواعد الحصر نجد : $-4,08 < f(\alpha) < -3,89$ ....0.25.

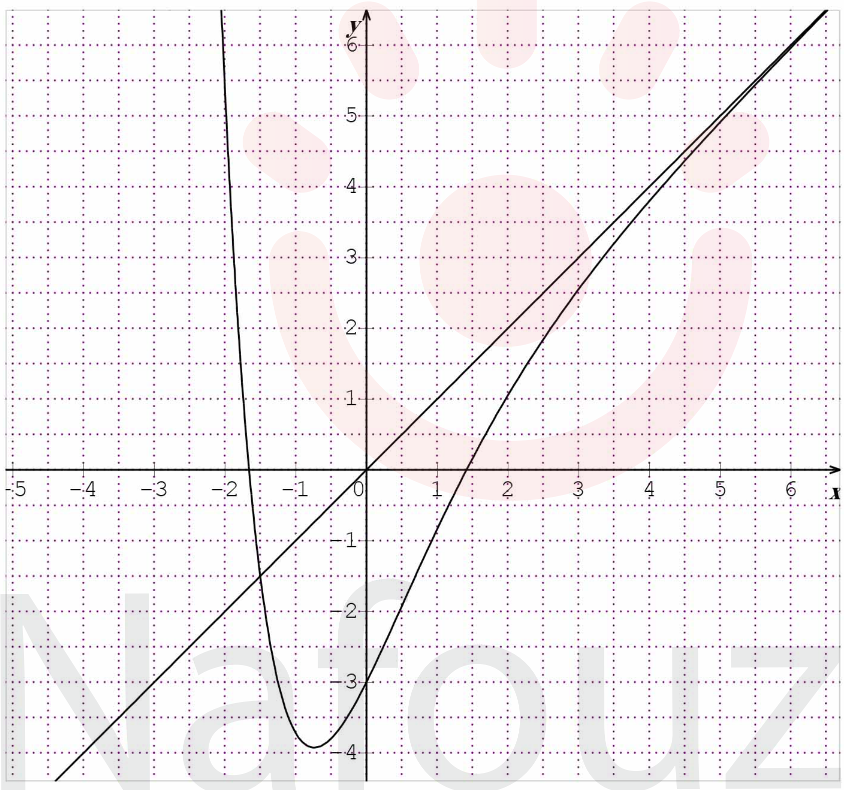
ج) لدينا: $f''(x) = g'(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $g'(x)$ حسب الجدول التالي..........................0.25

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

• بما أن $f''(x) = 0$ من أجل $x = \frac{1}{2}$ ويغير إشارته فإن (C_f) تقبل نقطة انعطاف $I\left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{-4}{\sqrt{e}} + \frac{1}{2}\right)$........0.25

• معادلة المماس (T) عند النقطة I هي: $y = \left(\frac{2}{\sqrt{e}} + 1\right)x - \frac{5}{\sqrt{e}}$ 0.25

4) رسم (d) و (C_f)..0.75



5) لدينا: $H(x) = (ax+b)e^{-x}$ و $h(x) = (-2x-3)e^{-x}$.

أ) تعيين a و b بحيث: H دالة أصلية لـ: h لدينا: $H'(x) = h(x)$ يكافئ: $(-ax-b+a)e^{-x} = (-2x-3)e^{-x}$.

ومنه: $a = 2$ و $b = 5$ وعليه فإن $H(x) = (2x+5)e^{-x}$..0.25

$A(\alpha) = \int_{\alpha}^{2} (x - f(x))dx = \frac{9e^{\alpha} - e^{2}(2\alpha+5)}{e^{\alpha+2}} cm^2$...0.25